www.matemagik.pl

karol@matemagik.pl

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Grudzień 2024

CZAS PRACY: **180** minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Zadanie 1. (0-2)

Bateria telefonu była początkowo naładowana w 20%. Po 1 godzinie od podłączenia ładowarki osiągnęła poziom 60%. Proces ładowania opisuje wzór:

$$Q(t) = Q_0 + (Q_{\max} - Q_0) \cdot (1 - r^t),$$

gdzie:

$Q(t)$ – poziom naładowania baterii (w procentach) po czasie t godzin,

Q_0 – początkowy poziom naładowania,

$Q_{\max} = 100\%$ – maksymalny poziom naładowania,

r – współczynnik szybkości ładowania $(0 < r < 1)$.

Wyznacz wartość współczynnika r. Oblicz ile jeszcze czasu potrzeba, aby bateria osiągnęła 90% naładowania. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{|x^3 - 27|}{x^2 - 9}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że jeżeli $\log_{12} 27 = a$, to

$$\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{a+3}.$$

Zadanie 4. (0-3)

Do hurtowni dostarczono sery z mleczarni M_1, M_2 i M_3. Mleczarnia M_1 dostarczyła 3000 sztuk, mleczarnia M_2 – 2500 sztuk, zaś mleczarnia M_3 – 1500 sztuk serów. Wiadomo, że mleczarnia M_1 produkuje i dostarcza tyle samo serów pełnotłustych co innych, mleczarnia M_2 – trzy razy więcej serów pełnotłustych niż innych, a mleczarnia M_3 – cztery razy więcej serów pełnotłustych niż innych.
Wylosowano ser pełnotłusty.

Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi on z mleczarni M_1.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-5)
Dany jest układ równań

$$\begin{cases} x + y = m \\ 3x - 2y = 2m - 1 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x| + |y| \leq 1$.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{ax^5}{x - x^3}$$

dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Styczna do jej wykresu w punkcie P o pierwszej współrzędnej równej 2 jest równoległa do prostej o równaniu $32x + 9y - 1 = 0$.

Wyznacz wartość a oraz równanie tej stycznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$.

Wyznacz wszystkie wartości n, dla których spełniona jest nierówność

$$|S - S_n| < \frac{1}{96}$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4mx^2 - 4(1-2m)x + 9m - 8 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq -4$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos 2x$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-3)

Na okręgu opisano trapez, którego ramiona tworzą z podstawą kąty ostre o miarach α i β. Pole trapezu jest równe P.

Wykaż, że długość promienia okręgu jest równa

$$\sqrt{\frac{\boldsymbol{P \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}}{\boldsymbol{2(\sin\alpha + \sin\beta)}}}$$

Zadanie 11. (0-5)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną DB podstawy i środek E krawędzi CS. Pole otrzymanego przekroju jest równe 9, a kąt jego nachylenia do płaszczyzny podstawy ma miarę α.
Objętość tego ostrosłupa jest równa $k \cdot \sqrt{\sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym.

Oblicz współczynnik k.

Zapisz obliczenia.

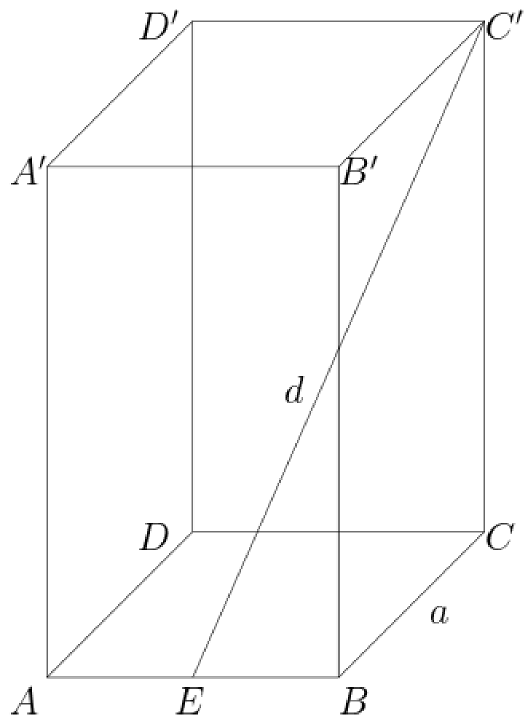
Zadanie 12. (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dwa wierzchołki trójkąta ostrokątnego ABC mają współrzędne: $A = (-2, -4)$, $B = (5, 10)$. Bok BC ma długość równą $5\sqrt{5}$, a kąt ABC ma miarę α taką, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka C.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 13

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDA'B'C'D'$ odcinek o długości d łączy środek E krawędzi podstawy AB z wierzchołkiem C' drugiej podstawy (zobacz rysunek).



Zadanie 13.1 (0-2)

Wykaż, że pole powierzchni bocznej P tego graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określone wzorem

$$\boldsymbol{P(a) = 2a\sqrt{4d^2 - 5a^2}}$$

Zadanie 13.2 (0-4)

Pole powierzchni bocznej P graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy jest określone wzorem

$$P(a) = 2a\sqrt{4d^2 - 5a^2}$$

dla $a \in \left(0; \frac{2\sqrt{5}}{5}d\right)$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni bocznej jest największe. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)